多様体の基本群は高々可算である

@mikecat1024

タイトル通りのことを示します. 間違いなどがあれば三毛猫 (@mikecat1024) まで教えていただけると嬉しいです。

定義 2.1 (多様体).
位相空間 M が Hausdorff かつ第二可算かつ座標近傍系をもつとき, M を多様体という.

補題 2.2.
n 次元多様体 M の可算開被覆 $\mathcal{C}$ で, 任意の開集合 $U \in \mathcal{C}$ が $\mathbb{R}^n$ の開球と同相であるようなものが存在する.
証明. M の座標近傍系を $\mathcal{A}$ とすれば, 任意の $x \in M$ について, x のある座標近傍 $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ が存在する. また, $U' := \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ は開集合であるから, ある $\delta > 0$ が存在し, $x' := \phi(x)$ を中心とする半径 δ の開球 $B'_\delta(x')$ で $B'_\delta(x') \subset U'$ となるようなものが存在する. ここで, $\mathcal{B} = \{\phi^{-1}(B'_\delta(x'))\}_{x \in M}$ とすれば, これは M の開被覆であり, M は第二可算なので Lindelöf 性からその可算部分開被覆 $\mathcal{B}_0$ が存在し, ϕ は同相なので $\mathcal{C} = \mathcal{B}_0$ とすれば条件を満たす. □

補題 2.3.
可分な局所連結空間 X の連結成分 $\pi_0(X)$ は高々可算である.
証明. X の稠密な可算部分集合を X_0 とすれば, 局所連結空間の連結成分は開集合なので, 任意の $C \in \pi_0(X)$ について, $C \cap X_0 \neq \emptyset$ である. C に対して, 適当な $x_C \in C \cap X_0$ を対応させるような写像を f とすれば,

$$f : \pi_0(X) \ni C \mapsto x_C \in X_0$$

が定まるが, $\pi_0(X)$ の異なる元は共通部分を持たないので f は可算集合への単射である. したがって $\pi_0(X)$ は高々可算である. □

補題 2.4.
compact な距離空間 (X, d) について, その開被覆を $\mathcal{A}$ とすれば, ある $\epsilon > 0$ が存在して X の半径 ϵ 以下の任意の部分集合はある $U \in \mathcal{A}$ に含まれる.
証明. X は compact なので, $\mathcal{A}$ の有限部分開被覆 $\{A_1, \ldots, A_n\}$ が存在し, $f : X \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, A_i^c)$$

で定めれば, f は compact 空間上の実連続関数なので最小値 δ が存在する. ここで, $\{A_1, \ldots, A_n\}$ は X の開被覆なので, $\delta > 0$ である. これより, $x \in X$ を任意に固定すれば, $f(x) \geq \delta$ が成り立つので, ある i が存在し

て $d(x, A_i^c) \geq \delta$ となる．これは x を中心とする半径 $\delta/2$ の球 $B_{\delta/2}(x)$ について $B_{\delta/2}(x) \subset A_i$ が成り立つことを示すので, $\epsilon = \delta/2$ とすれば主張が従う． □

定理 2.5.

多様体 M の基本群は高々可算である．

証明. 補題 2.2 の条件を満たす M の開被覆を $\mathcal{A}_0$ とする．また, 各 $U, V \in \mathcal{A}_0$ について, 補題 2.3 より $U \cap V$ の連結成分は高々可算である．ゆえに,

$$\mathcal{C}_0 = \bigcup_{U,V \in \mathcal{A}_0} \pi_0(U \cap V)$$

とすれば, $\mathcal{C}_0$ は高々可算になる．ここで, $\varphi : \mathcal{C}_0 \to M$ を $C_{U,V} \in \pi_0(U \cap V) \subset \mathcal{C}_0$ に対して, 適当な一つの点 $x_{U,V} \in C_{U,V}$ を対応させるような写像とする．このとき, $R_0 := \{\varphi(C)\}_{C \in \mathcal{C}_0}$ は高々可算集合である．ただし, $b \in R_0$ としておく．さらに,

$$P_0 = \{h_{x,y} : x \text{ から } y \text{ への path} \mid \exists U \in \mathcal{A}_0, x, y \in R_0 \cap U\}$$

とすれば, P_0 も高々可算となる．

以下, $b \in M$ を任意に固定し, $\pi_1(M, b)$ の任意の元 f が

$$H_0 := \{h_{x_1,y_1} h_{x_2,y_2} \cdots h_{x_n,y_n} \mid n \in \mathbb{N}, h_{x_i,y_i} \in P_0\}$$

の元と homotopic であることを示せば十分である．実際, P_0 が高々可算であることから H_0 も高々可算なので, $\pi_1(M, b)$ が高々可算であることが従う．今, $\mathcal{A}_0$ は M の開被覆なので, $\{f^{-1}(U)\}_{U \in \mathcal{A}_0}$ は f の定義域 $[0, 1]$ の開被覆である．$[0, 1]$ は compact なので, $\mathcal{A}_0$ の有限部分集合 $\mathcal{A}_{-1}$ で, $\{f^{-1}(U)\}_{U \in \mathcal{A}_{-1}}$ が $[0, 1]$ の開被覆となるようなものが存在する．ここで, 補題 2.4 より,

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$$

なる有限個の数であって, すべての $1 \leq j \leq n$ についてある $U_j \in \mathcal{A}_{-1}$ が存在し, $f([x_{j-1}, x_j]) \subset U_j$ を満たすものが存在する．このとき, すべての $1 \leq i \leq n-1$ について, $f(x_i) \in U_i \cap U_{i+1}$ が成り立つので, R_0 の定義より, すべての $1 \leq i \leq n-1$ についてある $s_i \in R_0$ が存在して, $f(x_i)$ と s_i は同じ連結成分に属するようなものが存在する．多様体においては連結と弧状連結は同値なので, s_i から $f(x_i)$ への path が存在し, それを一つとって g_i と定める．ただし, $g_0 = g_n = c_b$ と定めておく．また,

$$f_i(x) = f((x_i - x_{i-1})x + x_{i-1})$$

と定めれば, $f_i : [0, 1] \to M$ は $f(x_{i-1})$ から $f(x_i)$ への path である．以上より,

$$\begin{aligned} f &\sim f_1 f_2 \cdots f_n \\ &\sim g_0 f_1 g_1^{-1} g_1 f_2 \cdots g_{n-1}^{-1} g_{n-1} f_n g_n^{-1} \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし, g_i^{-1} は基本群における g_i の逆元である．さらに, $1 \leq i \leq n-1$ について, $g_i f_{i+1} g_{i+1}^{-1}$ と $h_{s_i,s_{i+1}} \in P_0$ の始点と終点は等しく $s_i, s_{i+1} \in B_{i+1}$ であり, B_{i+1} は単連結なので $g_i f_{i+1} g_{i+1}^{-1} \sim h_{s_i,s_{i+1}}$ が成り立つ．したがって,

$$f \sim h_{b,s_1} h_{s_1,s_2} \cdots h_{s_{n-1},b} \in H_0$$

となるので, $\pi_1(M, b)$ は高々可算であることが従う．

□